1. V urně máme tři kuličky a každá z nich má bílou nebo černou barvu. V každém kroku náhodně vytáhneme jednu kuličku. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ji vrátíme zpět do urny a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ místo ní do urny dáme kuličkou opačné barvy. Označmě X_n počet kuliček bílé barvy v urně po n-tém kroku pro $n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Uvědomte si, že $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)

   (b) Sestavte matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)

   (c) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

   (d) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

   (e) Spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku při rovnoměrném počátečním rozdělení (na množině $\{0, 1, 2, 3\}$). (1 bod)

2. Mějme markovský řetězec s množinou stavů $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (a) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

   (b) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

   (c) Najděte matici U pradvěpodobností absorpce do množiny trvalých stavů. (2 body)

3. Mějme markovský řetězec s množinou stavů $\mathbb{N}_0$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

   Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (5 bodů)